1. content

Proposition 2.1: An operator $T \in B_{A^{\frac{1}{2}}}(H)$ is invertible in $B_{A^{\frac{1}{2}}}(H)$ if and only if the following two conditions are satisfied:

$$\exists c > 0, \quad \frac{1}{c}\|x\|_A \leq \|Tx\|_A \leq c\|x\|_A$$

for all $x \in H$, and

$$R(AT) = R(A).$$

Proposition 2.2: Let $T \in B_{A^{\frac{1}{2}}}(H)$ and $L \in B(H)$ be such that $T^*A^{\frac{1}{2}} = A^{\frac{1}{2}}L$. Then T is invertible in $B_{A^{\frac{1}{2}}}(H)$ if and only if there is $c > 0$ such that $\forall x \in H$,

$$c\|x\|_A \leq \|Tx\|_A, \quad c\|x\|_A \leq \|Lx\|_A.$$

Proposition 2.3: Let $T \in B_{A^{\frac{1}{2}}}(H)$ and $L \in B(H)$ be such that $T^*A^{\frac{1}{2}} = A^{\frac{1}{2}}L$. Then T is invertible in $B_{A^{\frac{1}{2}}}(H)$ if and only if T_{eff} and L_{eff} are both invertible.

Proposition 2.4: If $T \in B_{A(H)}$ and $T, T^\sharp$ are both invertible in $B_{A^{\frac{1}{2}}}(H)$ then any A–inverse S of T is in $B_{A(H)}$. Moreover $S^\sharp$ is an A–inverse of $T^\sharp$.

Proposition 3.1: Let $A \in B(H)$ be closed range positive and $T \in B_{A^{\frac{1}{2}}}(H)$. Then for all $\lambda > \|T\|_A$, the operator $\lambda I - T$ is invertible in $B_{A^{\frac{1}{2}}}(H)$.

Proposition 3.2: Let $T \in B_{A^{\frac{1}{2}}}(H)$. Then for all complex value λ such that

$$|\lambda| > \max(\|T\|_A, \|PT\|),$$

the operator $\lambda I - T$ is invertible in $B_{A^{\frac{1}{2}}}(H)$.

Proposition 3.3: Let $T \in B_{A^{\frac{1}{2}}}(H)$, then

$$\sigma(PT) \setminus \{0\} \subseteq \sigma_{A(T)}.$$

Theorem 3.1: Let $T \in B_{A^{\frac{1}{2}}}(H)$ and $L \in B(H)$ be such that $T^* A^{\frac{1}{2}} = A^{\frac{1}{2}} L$. Then

$$\sigma_{A(T)} = \sigma(T_{\text{eff}}) \cup \sigma(L^*_{\text{eff}}).$$

Proposition 3.4: Let $T \in B_{A^{\frac{1}{2}}}(H)$ and $L \in B(H)$ be such that $T^* A^{\frac{1}{2}} = A^{\frac{1}{2}} L$. Then

$$\sigma_{A(L)} = \sigma_{A^*}(T) = \left\{\overline{\lambda} : \lambda \in \sigma_{A(T)}\right\}.$$

2. proposition 2.1

$$T \in B_{A(\frac{1}{2})}(H)\text{是A-可逆} \Longleftrightarrow \|x\|_A \leq c\|Tx\|_A \wedge R(AT) = R(A)$$

左推右:

$$\begin{aligned}
\text{下有界:} A = AST &\Rightarrow A^{\frac{1}{2}} = A^{\frac{1}{2}}ST \\
&\Rightarrow \left\|A^{\frac{1}{2}}x\right\| = \left\|A^{\frac{1}{2}}STx\right\| \\
&\Rightarrow \|x\|_A = \|STx\|_A \leq \|S\|_A\|Tx\|_A \\
\text{值域包含}: ATS = A &\Rightarrow R(AT) = R(A)
\end{aligned}$$

再证明S是A–有界的:$c\|Sx\|_A \leq \|TSx\|_A = \|x\|_A$

$$T \in B_{A(\frac{1}{2})}(H)\text{是A-可逆} \iff \|x\|_A \le c\|Tx\|_A \wedge R(AT) = R(A)$$

右推左:

$$R(AT) = R(A) \Rightarrow \exists S, ATS = A$$

$$\|x\|_A \le c\|Tx\|_A \Rightarrow \left\|A^{\frac{1}{2}}x\right\| \le c\left\|A^{\frac{1}{2}}Tx\right\| \Rightarrow (ATx = 0 \Rightarrow Ax = 0)$$

$$ATS = A \Rightarrow ATST - AT = 0$$

$$AT(ST - I) = 0 \Rightarrow A(ST - I) = 0$$

$$AST = A$$

再证明S是A–有界的:$c\|Sx\|_A \le \|TSx\|_A = \|x\|_A$

3. proposition 2.2

$$T \in B_{A(\frac{1}{2})}(H)\text{是A-可逆} \iff \|x\|_A \leq c\|Tx\|_A \wedge \|x\|_A \leq c\|Lx\|_A$$

与上一个 proposistion 对比：

$$T \in B_{A(\frac{1}{2})}(H)\text{是A-可逆} \iff \|x\|_A \leq c\|Tx\|_A \wedge R(AT) = R(A)$$

所以只需要证明

$$\|x\|_A \leq c\|Lx\|_A \iff R(AT) = R(A)$$

即

$$\|x\|_A \leq c\|Lx\|_A \iff R(AT) \supseteq R(A)$$

要证明

$$\|x\|_A \le c\|Lx\|_A \iff R(AT) \supseteq R(A)$$

Douglas 定理 $\|x\|_A \le \sqrt{c}\|Lx\|_A$

以下三个等价

1. $R(S) \subseteq R(T)$
2. $\exists \lambda > 0, SS^* \le \lambda TT^*$
3. $\exists D \in B(H), TD = S$

$$\begin{aligned}
&\iff \langle Ax, x\rangle \le c\langle ALx, Lx\rangle \\
&\iff \langle Ax, x\rangle \le c\langle L^*ALx, x\rangle \\
&\iff A \le cL^*AL \\
&\iff A \le cL^*A^{\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}}L \\
&\iff A \le cA^{\frac{1}{2}}T\left(A^{\frac{1}{2}}T\right)^* \\
&\iff R\left(A^{\frac{1}{2}}T\right) \supseteq R\left(A^{\frac{1}{2}}\right) \\
&\iff \exists S, A^{\frac{1}{2}}TS = A^{\frac{1}{2}} \\
&\iff \exists S, ATS = A \quad \left(\text{因为} N\left(A^{\frac{1}{2}}\right) = N(A)\right) \\
&\iff R(AT) \supseteq R(A)
\end{aligned}$$

4. 有效作用 T_{eff}

记 P 为到 $\overline{R(A)} = N(A)^{\perp}$ 的正交投影。(A 是自共轭算子所以相等)

定义： 对任意 $T \in B(H)$，定义

$$T_{\text{eff}} = (PTP)|_{\overline{R(A)}} \in B\Big(\overline{R(A)}\Big).$$

即 $T_{\text{eff}}x = PTx, \quad x \in \overline{R(A)}$。

利用正交分解

$$H = N(A) \oplus \overline{R(A)},$$

有

$$T = \begin{pmatrix} (I-P)T(I-P) & (I-P)TP \\ PT(I-P) & PTP \end{pmatrix} \overset{T\text{是}A\text{-有界}}{=} \begin{pmatrix} & \\ 0 & PTP \end{pmatrix}$$

$$PTP = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & T_{\text{eff}} \end{pmatrix}, \quad PAP = A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A_{\text{eff}} \end{pmatrix}.$$

5. proposition 2.3

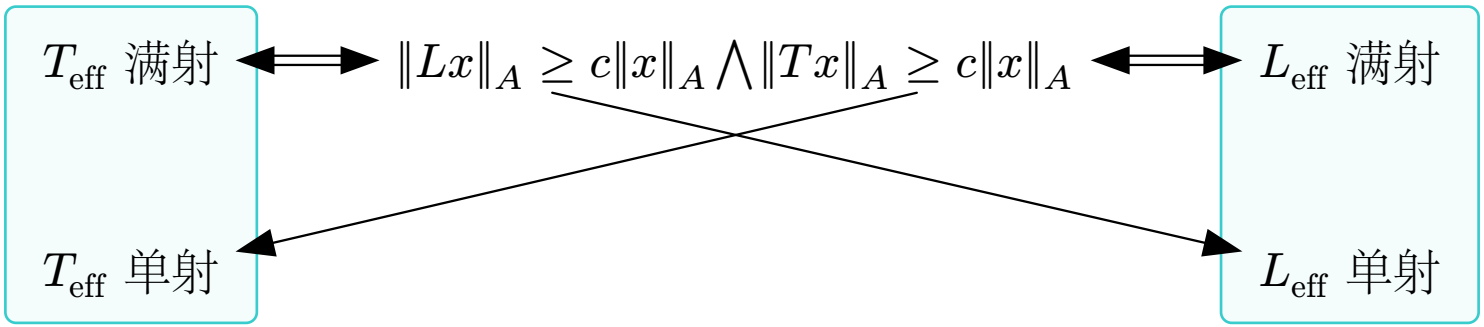
$$T \in B_{A(\frac{1}{2})}(H)\text{是A-可逆} \iff T_{\text{eff}}\text{是可逆} \wedge L_{\text{eff}}\text{是可逆}$$

与上一个 proposistion 对比：

$$T \in B_{A(\frac{1}{2})}(H)\text{是A-可逆} \iff \|x\|_A \leq c\|Tx\|_A \wedge \|x\|_A \leq c\|Lx\|_A$$

所以只需要证明

$$\|x\|_A \leq c\|Tx\|_A \wedge \|x\|_A \leq c\|Lx\|_A \iff T_{\text{eff}}\text{是可逆} \wedge L_{\text{eff}}\text{是可逆}$$


T_{eff} 满射
T_{eff} 单射
$\|Lx\|_A \geq c\|x\|_A \bigwedge \|Tx\|_A \geq c\|x\|_A$
L_{eff} 满射
L_{eff} 单射

$$\begin{aligned}
\|Tx\|_A \geq c\|x\|_A, \quad \forall x \in H &\Leftrightarrow \left\|A^{\frac{1}{2}}Tx\right\| \geq c\left\|A^{\frac{1}{2}}x\right\|, \quad \forall x \in H \\
&\Leftrightarrow \left\|L^*A^{\frac{1}{2}}x\right\| \geq c\left\|A^{\frac{1}{2}}x\right\|, \quad \forall x \in H \\
&\Leftrightarrow \|L^*y\| \geq c\|y\|, \quad \forall y \in R\left(A^{\frac{1}{2}}\right) \\
&\Leftrightarrow \|L^*Py\| = \|L^*y\| \geq c\|y\|, \quad \forall y \in \overline{R(A)}.
\end{aligned}$$

也就是

$$\|Tx\|_A \geq c\|x\|_A \Longleftrightarrow L^*_{\text{eff}}\text{是下有界} \overset{\text{经典性质}}{\Longleftrightarrow} L_{\text{eff}}\text{是满射}$$

再证明 $\|Tx\|_A \geq c\|x\|_A \Rightarrow T_{\text{eff}}$单射

$$
\begin{aligned}
& T_{\text{eff}}u = PTPu = 0 \\
\Rightarrow\ & PTu = 0 \quad \left(u \in \overline{R(A)} \Rightarrow Pu = u\right) \\
\Rightarrow\ & A^{\frac{1}{2}}Tu = 0 \quad \left(N(P) = N(A) = N\left(A^{\frac{1}{2}}\right)\right) \\
\Rightarrow\ & \left\|A^{\frac{1}{2}}Tu\right\| = \|Tu\|_A = 0 \\
\Rightarrow\ & \|u\|_A = \left\|A^{\frac{1}{2}}u\right\| = 0 \quad (\|Tx\|_A \geq c\|x\|_A) \\
\Rightarrow\ & u \in N\left(A^{\frac{1}{2}}\right) = N(A) \overset{u\in\overline{R(A)}}{\Rightarrow} u = 0, \quad \forall u \in \overline{R(A)}
\end{aligned}
$$

同理

6. Proposition 3.2：利用 Proposition 2.1

$$|\lambda| > \|PT\| \Longrightarrow \lambda I - PT \text{ 在 } B(H)\text{中是可逆的}$$

又因为 $AP = A$,

$$A(\lambda I - T) = A(\lambda I - PT).$$

因此

$$R(A(\lambda I - T)) = R(A(\lambda I - PT)) = R(A).$$

$$\|PT\| = \|PTP\| = \|T_{\text{eff}}\|$$

$$\|T\|_A = \sup_{\|x\|_A \neq 0} \frac{\|Tx\|_A}{\|x\|_A} = \sup_{\|x\|_A \neq 0} \frac{\left\|A^{\frac{1}{2}}Tx\right\|}{\left\|A^{\frac{1}{2}}x\right\|} = \sup_{\|x\|_A \neq 0} \frac{\left\|L^*A^{\frac{1}{2}}x\right\|}{\left\|A^{\frac{1}{2}}x\right\|} = \|L^*_{\text{eff}}\|$$

$$|\lambda| > \max(\|T\|_A, \|PT\|) \Longleftrightarrow |\lambda| > \max(\|T_{\text{eff}}\|, \|L_{\text{eff}}\|).$$

所以 $\lambda I - T_{\text{eff}}, \quad \overline{\lambda} I - L_{\text{eff}}$ 都可逆。

$$(\lambda I - T)_{\text{eff}} = \lambda I - T_{\text{eff}},$$

$$(\lambda I - T)^* A^{\frac{1}{2}} = A^{\frac{1}{2}}\Big(\overline{\lambda} I - L\Big).$$

7. Proposition 3.3

$$\sigma(PT) \setminus \{0\} \subset \sigma_A(T)$$

$$\rho(PT) \supset \rho_A(T) \setminus \{0\}$$

只需证明 $\lambda \neq 0, \lambda \in \rho_A(T) \Rightarrow \lambda \in \rho(PT)$

空间分解 $H = N(A) \oplus \overline{R(A)}$ 有

$$T = \begin{pmatrix} (I-P)T(I-P) & (I-P)TP \\ 0 & PTP \end{pmatrix}$$

$$PT = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & PPP \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (I-P)T(I-P) & (I-P)TP \\ 0 & PTP \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & PTP \end{pmatrix}$$

$$\lambda I - T = \begin{pmatrix} \lambda I - (I-P)T(I-P) & (I-P)TP \\ 0 & \lambda I - PTP \end{pmatrix}$$

$\lambda I - T$是A–可逆 $\Rightarrow$ $\lambda I - T_{\text{eff}}$是可逆的$\Rightarrow$

$$\lambda I - PT = \begin{pmatrix} \lambda I & 0 \\ 0 & \lambda I - PTP \end{pmatrix}$$

8. Proposition 4.1

$$H = l^2(\mathbb{N}_0) \quad A = \operatorname{diag}\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \ldots\right)$$

$$T = U + \frac{1}{2}U^* \quad \text{其中}U\text{是右移算子}$$

$$AU = \frac{1}{2}UA \quad U^*A = \frac{1}{2}AU^*$$

$$\begin{aligned} T^*A &= \left(U^* + \frac{1}{2}U\right)A \\ &= \frac{1}{2}AU^* + AU \\ &= A\left(\frac{1}{2}U^* + U\right) \end{aligned}$$

首先证明 T 是 A–有界的。由

$$A^{\frac{1}{2}}U = \frac{1}{\sqrt{2}}UA^{\frac{1}{2}}, \quad A^{\frac{1}{2}}U^* = \sqrt{2}U^*A^{\frac{1}{2}},$$

得

$$A^{\frac{1}{2}}T = \frac{1}{\sqrt{2}}(U+U^*)A^{\frac{1}{2}}.$$

因此，对任意 $x \in H$，

$$\|Tx\|_A \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \|U+U^*\| \|x\|_A \leq \sqrt{2} \|x\|_A.$$

故 $T \in B_{A^{\frac{1}{2}}}(H)$。

另一方面，由

$$AU = \frac{1}{2}UA, \quad U^*A = \frac{1}{2}AU^*,$$

可得

$$T^*A = \left(U^* + \frac{1}{2}U\right)A = \frac{1}{2}AU^* + AU = AT.$$

因此 T 是 A–自伴算子，且 $T \in B_{A(H)}$。

下面证明 $\frac{i}{2} \in \sigma_{A(T)}$。

对任意整数 $N \geq 3$，令

$$x_N = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^{N} (-i)^n e_n.$$

则 $\|x_N\| = 1$。直接计算得

$$\left(T-\frac{i}{2}I\right)x_N=\frac{1}{\sqrt{N}}\left(-\frac{i}{2}e_0-e_1+\frac{i}{2}(-i)^N e_N+(-i)^N e_{N+1}\right).$$

因此

$$\left\|\left(T-\frac{i}{2}I\right)x_N\right\|^2=\frac{5}{2N}\to 0.$$

这说明 $T-\frac{i}{2}I$ 不可能在 $B(H)$ 中可逆，即

$$\frac{i}{2}\in\sigma(T).$$

又因为 A 是单射，若 $T-\frac{i}{2}I$ 存在 A–逆 $S\in B_{A^{\frac{1}{2}}}(H)$，则

$$A\left(T-\frac{i}{2}I\right)S=A=AS\left(T-\frac{i}{2}I\right).$$

由 A 的单射性，得到

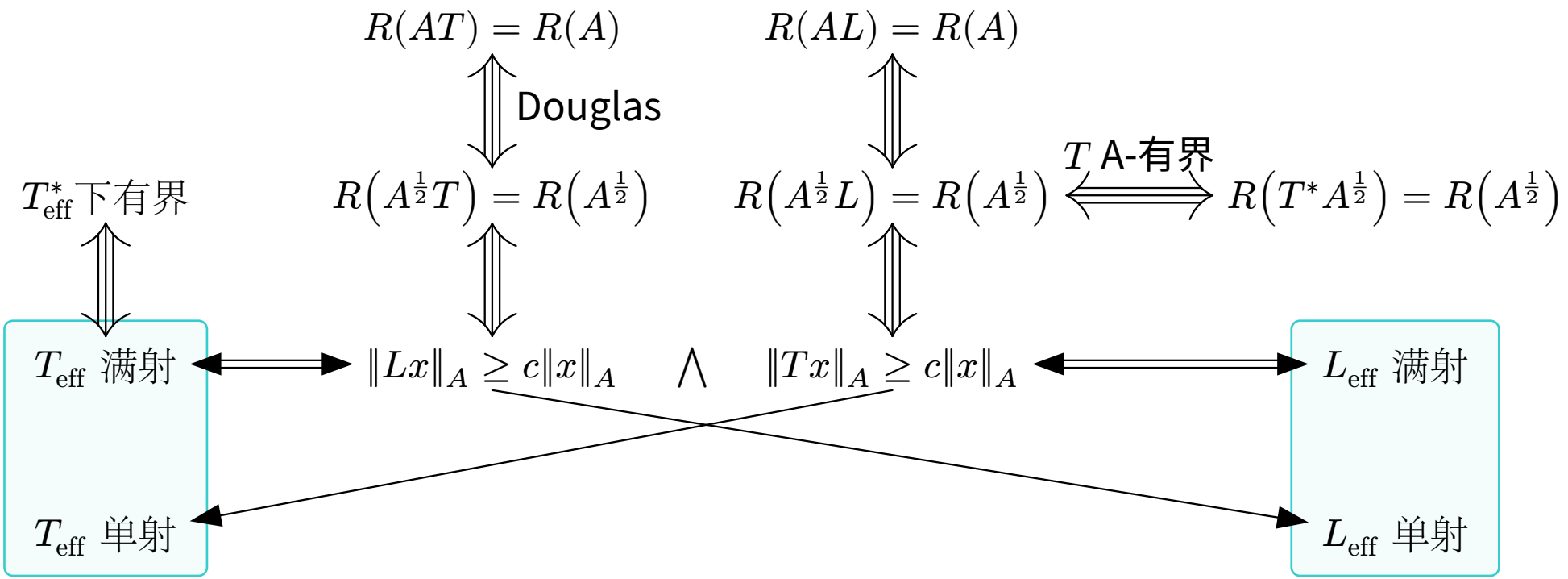
$$\left(T-\frac{i}{2}I\right)S=S\left(T-\frac{i}{2}I\right)=I.$$

这与 $\frac{i}{2}\in\sigma(T)$ 矛盾。

因此

$$\boxed{\frac{i}{2}\in\sigma_{A(T)}\notin\mathbb{R}}\ .$$

8. Proposition 4.1


$R(AT) = R(A)$
$R(AL) = R(A)$
Douglas
T A-有界
T^*_{eff}下有界
$R\left(A^{\frac{1}{2}}T\right) = R\left(A^{\frac{1}{2}}\right)$
$R\left(A^{\frac{1}{2}}L\right) = R\left(A^{\frac{1}{2}}\right)$
$R\left(T^*A^{\frac{1}{2}}\right) = R\left(A^{\frac{1}{2}}\right)$
T_{eff} 满射
$\|Lx\|_A \geq c\|x\|_A$
$\bigwedge$
$\|Tx\|_A \geq c\|x\|_A$
L_{eff} 满射
T_{eff} 单射
L_{eff} 单射

$$S \in B_{A(\frac{1}{2})}(H) \wedge ATS = AST = A$$

A-逆是否唯一

$$T\text{的所有 A-逆} = S_0 + \{S : R(S) \subset N(A)\}$$