1.6 $\widetilde{H}(A_\Omega)$ 的微分学

《Banach 代数与谱论》原文整理

整理说明：尽量按原书第 *38–50* 页转录，保留原有编号、证明结构及用语；修正明显排印问题。末尾附校勘说明，非原书文字。

原书第 38 页

这一节继续考察 $\widetilde{H}(A_\Omega)$ 中的元。将要得出的结论是：它们与经典分析中的全纯函数颇为相似，特别是有关可微性、幂级数表示和开映射的性质几个方面。读者还能看到，在交换代数的情况下，所得的结果要比非交换代数更加类似于经典分析中的全纯函数。

1.6.1 定义 设 X 与 Y 均为 Banach 空间，Ω 是 X 的一个开子集，映射 $F:\Omega\to Y$，$a\in\Omega$。如果有 $\Lambda\in\mathcal{L}(X,Y)$ 能使

$$\lim_{x\to 0}\frac{\|F(a+x)-F(a)-\Lambda x\|}{\|x\|}=0,$$

则 Λ 称为 F 在 a 的 Fréchet 导数，记作 $(DF)_a$。

如果每个 $a\in\Omega$ 都有 $(DF)_a$ 存在，并且映射

$$a\longmapsto (DF)_a$$

是由 Ω 到 $\mathcal{L}(X,Y)$ 内的连续映射，那么，F 称为在 Ω 内是连续可微的。

请读者注意，我们没有要求 Λ 的唯一性，因为这件事并不重要。

原书第 39 页

1.6.2 差商的概念 如果 A 是 Banach 代数，$x\in A$，且 $x+h\in A$，在恒等式

$$(\lambda e-x)-(\lambda e-x-h)=h$$

的两端同时左乘以 $(\lambda e-x-h)^{-1}$ 和右乘以 $(\lambda e-x)^{-1}$，可以得到

$$(\lambda e-x-h)^{-1}-(\lambda e-x)^{-1}=(\lambda e-x-h)^{-1}h(\lambda e-x)^{-1}. \tag{1}$$

当然，事先应假定这些逆元素都存在。

现在，取开集 $\Omega\subset\mathbb{C}$，$x\in A_\Omega$，$x+h\in A_\Omega$ 以及 $f\in H(\Omega)$；再适当选取积分路线 Γ 使其在 Ω 内围绕 $\sigma(x)\cup\sigma(x+h)$。于是，由 (1) 式导出

$$\widetilde{f}(x+h)-\widetilde{f}(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(\lambda)(\lambda e-x-h)^{-1}h(\lambda e-x)^{-1}\,\mathrm{d}\lambda. \tag{2}$$

如果 h 与 x 可以交换，亦即 $xh=hx$，那么，h 可以从 (2) 式的积分号中移出，这是我们曾在定义 1.3.5 中讲过的。这样，

$$(Q\widetilde{f})(x,h)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(\lambda)(\lambda e-x-h)^{-1}(\lambda e-x)^{-1}\,\mathrm{d}\lambda. \tag{3}$$

这时可以将 (2) 式改写成

$$\widetilde{f}(x+h)-\widetilde{f}(x)=h(Q\widetilde{f})(x,h), \tag{4}$$

于是，更容易理解 $(Q\widetilde{f})(x,h)$ 确实应当称为差商。

原书第 40 页

1.6.3 定理 如果 A 是交换 Banach 代数，开集 $\Omega\subset\mathbb{C}$，$x\in A_\Omega$，$f\in H(\Omega)$，那么，存在 $\delta>0$，对于一切 $h\in A$，当 $\|h\|<\delta$ 时，恒有

$$\widetilde{f}(x+h)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\widetilde{f^{(n)}}(x)h^n \tag{1}$$

成立。随之还有

$$(D\widetilde{f})_x(h)=\widetilde{f}'(x)h\qquad(h\in A). \tag{2}$$

换句话说，算子 $(D\widetilde{f})_x\in\mathcal{B}(A)$ 就是 $\widetilde{f}'(x)$ 左乘。

当然，这个定理所说的，显然是函数 $\widetilde{f}(x)$ 的局部映射的性质。

证 参照定理 1.4.10 的证明，有 $M<\infty$，对于 Γ 上的每个 λ，都有 $\|(\lambda e-x)^{-1}\|<M$，取 $\delta=1/M$，当 $\|h\|<\delta$ 时，级数

$$(\lambda e-x-h)^{-1}=\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda e-x)^{-n}h^{n-1} \tag{3}$$

在 Γ 上依 A 的范拓扑是一致收敛的，因此，§1.6.2 中的 (3) 式可以写成

$$\begin{aligned}(Q\widetilde{f})(x,h)&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(\lambda)(\lambda e-x)^{-n-1}\,\mathrm{d}\lambda\,h^{n-1}\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{n!}{2\pi i}\int_\Gamma f(\lambda)(\lambda e-x)^{-n-1}\,\mathrm{d}\lambda\right)h^{n-1}.\end{aligned} \tag{4}$$

在此，我们插一句话。对于 $f\in H(\Omega)$，读者当已熟悉 Cauchy 型积分公式

$$f^{(n)}(\zeta)=\frac{n!}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{f(\lambda)}{(\lambda-\zeta)^{n+1}}\,\mathrm{d}\lambda. \tag{5}$$

既然积分是和的极限，由定理 1.5.4 中的有关内容以及映射 $f\mapsto\widetilde{f}$ 的连续性，对应地可以得出

$$\widetilde{f^{(n)}}(x)=\frac{n!}{2\pi i}\int_\Gamma f(\lambda)(\lambda e-x)^{-n-1}\,\mathrm{d}\lambda. \tag{6}$$

现在，只须将 (6) 代入 (4)，就有

$$(Q\widetilde{f})(x,h)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\widetilde{f^{(n)}}(x)}{n!}h^{n-1}. \tag{7}$$

其中 h^{n-1} 的系数的范数受控制于一个常数（取决于 f 与 Γ）乘以 M^n，因此，(7) 式右端的级数依范数收敛。

注意到 A 是交换 Banach 代数，并将 (7) 应用于 §1.6.2 中的 (4)，立即可得

$$\widetilde{f}(x+h)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\widetilde{f^{(n)}}(x)h^n. \tag{8}$$

有了 (8)，再按照 Fréchet 导数的定义，经过直接经验验证就能得到 (2)。 □

以上所述，与经典分析 $A=\mathbb{C}$ 时所得的结果完全相同。但须注意，在此曾假定 A 是交换 Banach 代数。下面将要考虑非交换 Banach 代数的情况。

原书第 41 页

1.6.4 换位子 今后，将分别用 L_x 与 R_x 表示左乘与右乘以 Banach 代数 A 中的元素 x。因为在 A 中结合律 $(yx)z=y(xz)$ 成立，所以，每个左乘子 L_y 可与每个右乘子 R_x 交换：

$$L_y[R_x(z)]=R_x[L_y(z)].$$

特别是，L_x 与 R_x 彼此之间以及与算子

$$C_x=R_x-L_x \tag{1}$$

都是可交换的。由于

$$C_x(y)=yx-xy,$$

C_x 被称为 y 和 x 的换位子。

显然，L_x,R_x,C_x 都属于 $\mathcal{B}(A)$。还容易看出

$$\sigma(L_x)=\sigma(x)=\sigma(R_x),\qquad \|C_x\|\leq 2\|x\|. \tag{2}$$

为了验证 (2)，任取可逆元 $y\in A$，则有

$$(\lambda I-L_x)y=\lambda y-xy=(\lambda e-x)y.$$

可见 $\lambda I-L_x$ 与 $\lambda e-x$ 的逆元素存在与否的可能性是一致的，因而得到 $\sigma(L_x)=\sigma(x)$，类似地可得 $\sigma(R_x)=\sigma(x)$。

第 2 章的定理 2.4.3 的推论 2，还要进一步研究 $\sigma(C_x)$ 的某些更深刻的性质。

原书第 42 页

1.6.5 定理 如果 A 是 Banach 代数，开集 $\Omega \subset \mathbb{C}$，$x \in A_\Omega$，又 $f \in H(\Omega)$，那么，$\widetilde{f}$ 是一个从 A_Ω 到 A 内的连续可微函数，且有

$$(D\widetilde{f})_x(y) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(\lambda)(\lambda e - x)^{-1} y (\lambda e - x)^{-1}\,\mathrm{d}\lambda \qquad (y \in A), \tag{1}$$

其中 Γ 是 Ω 内任一围绕 $\sigma(x)$ 的积分路线。

算子 $(D\widetilde{f})_x$ 还能表示为 $\mathcal{B}(A)$-值积分

$$(D\widetilde{f})_x = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(\lambda)(\lambda I - R_x)^{-1}(\lambda I - L_x)^{-1}\,\mathrm{d}\lambda, \tag{2}$$

或者表示为差商

$$(D\widetilde{f})_x = (Q\widetilde{f})(L_x, C_x). \tag{3}$$

如果 Ω 包含了所有满足条件 $|\lambda| \le 3\|x\|$ 的 λ，那么，将有

$$(D\widetilde{f})_x = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!}\widetilde{f^{(m)}}(x) C_x^{m-1}. \tag{4}$$

我们还应当对 (3) 式所用的记号稍加说明。在其左端，$\widetilde{f}$ 是一个从 A_Ω 到 A 内的函数，而右端的 $\widetilde{f}$ 则代表一个从 $\mathcal{B}(A)_\Omega$ 到 $\mathcal{B}(A)$ 内的函数，因此 (3) 式两端都表示 $\mathcal{B}(A)$ 的元。

证 如果 $M > \|(\lambda e - x)^{-1}\|$ 对于 Γ 上的一切 λ 来说都能成立，又如 $2M\|y\| < 1$，则可利用定理 1.4.2 估计 $\widetilde{f}(x+y) - \widetilde{f}(x)$ 与 (1) 式右端之差，其范数将不超过 $2M^3\|y\|^2$ 乘以 Γ 的长度与 Γ 上的 $|f|$ 的最大值，再乘以 $1/(2\pi)$。按照 Fréchet 导数的定义，很容易验证 (1) 式成立。

为了求证 (2)，注意 $\mathcal{B}(A)$-值积分也是向量值积分，而积分过程乃是求和的极限。因此将 (2) 式右端看作算子时，任取 $y \in A$，都有

$$\begin{aligned}&\left[\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(\lambda)(\lambda I - R_x)^{-1}(\lambda I - L_x)^{-1}\,\mathrm{d}\lambda\right](y) \\ &\quad = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(\lambda)\left[(\lambda I - R_x)^{-1}(\lambda I - L_x)^{-1}(y)\right]\,\mathrm{d}\lambda.\end{aligned} \tag{5}$$

然后，设

$$(\lambda I - R_x)^{-1}(\lambda I - L_x)^{-1}(y) = z.$$

经过以下计算，有

$$\begin{aligned} y &= (\lambda I - L_x)(\lambda I - R_x)(z) \\ &= (\lambda I - L_x)(\lambda z - zx) \\ &= (\lambda I - L_x)(z)(\lambda e - x) \\ &= (\lambda z - xz)(\lambda e - x) \\ &= (\lambda e - x) z (\lambda e - x). \end{aligned}$$

于是得到

$$(\lambda e - x)^{-1} y (\lambda e - x)^{-1} = z.$$

这就证明了 (5) 式右端的被积函数与 (1) 式右端的被积函数完全相同。因此，(2) 作为 (1) 的算子形式的表达式是正确的。

我们将利用 (2) 来证 $\widetilde{f}$ 是一个从 A_Ω 到 A 内的连续可微映射。设 x 为点列 $\{x_n\}$ 的极限点，积分路线 Γ 在 Ω 内围绕除去有限个 n 以外的所有的 $\sigma(x_n)$。这时 $(D\widetilde{f})_{x_n}$ 由 (2) 式给出，只须将被积函数中的 x 换成 x_n。由于

$$\lim_{n\to\infty} (\lambda e - x_n)^{-1} = (\lambda e - x)^{-1} \tag{6}$$

在 Γ 上一致收敛，相应地 (2) 式右端的被积函数中也有

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} (\lambda I - R_{x_n})^{-1} &= (\lambda I - R_x)^{-1}, \\ \lim_{n\to\infty} (\lambda I - L_{x_n})^{-1} &= (\lambda I - L_x)^{-1}, \end{aligned} \tag{7}$$

在 Γ 上一致收敛，因此映射 $x \mapsto (D\widetilde{f})_x$ 是连续的，或者说，$\widetilde{f}$ 在 Ω 内连续可微。

至于 (3) 式，其实是 (2) 式的另一种写法，因为 $R_x = L_x + C_x$。

如果将 (2) 式中的积分路线 Γ 选为中心在原点、半径 $r > 3\|x\|$ 的一个圆周，那么，对于 Γ 上的每个 λ，都有

$$\begin{aligned} \|(\lambda I - L_x)^{-1}\| &= \left\| \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n-1} L_x^n \right\| \\ &\le \sum_{n=0}^{\infty} r^{-n-1} \|x\|^n = \frac{1}{r - \|x\|}. \end{aligned}$$

因而

$$\|(\lambda I - L_x)^{-1}\| \, \|C_x\| \le \frac{2\|x\|}{r - \|x\|} < 1. \tag{8}$$

尽管现在考虑的 Banach 代数 A 未必是交换代数，但是定理 1.6.3 的前一部分计算仍可应用于 $(Q\widetilde{f})(L_x, C_x)$，得出

$$(Q\widetilde{f})(L_x, C_x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} \widetilde{f^{(m)}}(L_x) C_x^{m-1}. \tag{9}$$

如果我们能够证明，对于任何 $y \in A$，以及每个 $g \in H(\Omega)$，都有

$$\widetilde{g}(L_x) y = \widetilde{g}(x) y, \tag{10}$$

那么，由 (3) 与 (9) 立即可得 (4)。而求证 (10) 并不困难，因为

$$\begin{aligned} \widetilde{g}(L_x) y &= \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma g(\lambda) (\lambda I - L_x)^{-1} y \, \mathrm{d}\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma g(\lambda) (\lambda e - x)^{-1} y \, \mathrm{d}\lambda \\ &= \widetilde{g}(x) y. \end{aligned}$$

□

饶有趣味的是，为了求证 (4) 式而选取的圆周积分路线 Γ 的半径 $r > 3\|x\|$ 是完全必要的。因为本章习题 26 将给出一个例子，如果 f 在距离原点 $3\|x\|$ 的地方有一个奇点，级数 (4) 可能不再收敛。这表明常数 3 绝不是偶然的。

另外，还可以说 (4) 是定理 1.6.3 的 (2) 的一般形式。因为，如果 A 是交换代数，将有 $C_x = 0$，这时，级数 (4) 就只剩下 $m = 1$ 的项。

原书第 45 页

1.6.6 定理（反函数定理） 如果 W 是 Banach 空间 X 的一个开子集，映射 $F : W \to X$ 是连续可微的，且对每个 $x \in W$ 来说，$(DF)_x$ 都是 $\mathcal{B}(X)$ 的可逆元，那么，每个点 $a \in W$ 都有一个邻域 U 使得：

(a) F 在 U 内是一对一的；

(b) $F(U) = V$ 是 X 的一个开子集；

(c) $F^{-1} : V \to U$ 连续可微。

定理的结论可以简略地说成是：F 是一个局部微分同胚。

证 为了简化证明过程，我们将 a 平移到原点。实际上，如果 $a \in W$，$T = (DF)_a$，又如

$$f(x) = T^{-1}[F(a + x) - F(a)] \qquad (x \in W - a), \tag{1}$$

那么，f 满足题设的各项条件，只是原来的 W 换成了 $W - a$。倘若 f 能使各项结论成立，则 F 也将是如此。所以，无妨用 f 代替 F。换句话说，可以不失一般性而假定

$$0 \in W, \qquad F(0) = 0, \qquad (DF)_0 = I. \tag{2}$$

这时，只须证在原点处有一个邻域 U 适合 (a)、(b) 和 (c)。

固定 α，$0 < \alpha < 1$，定义

$$\phi(x) = x - F(x) \qquad (x \in W). \tag{3}$$

于是 $(D\phi)_0 = 0$，又因为 ϕ 在 W 内是连续可微的，所以在以原点为中心的一个开球 $B \subset W$，使得 $x \in B$ 时，有

$$\|(D\phi)_x\| < \alpha. \tag{4}$$

任取 $x', x'' \in B$，作 $x_t = (1 - t)x' + tx''$，以及

$$\psi(t) = \phi(x_t) \qquad (0 \le t \le 1). \tag{5}$$

由于 $\psi : [0, 1] \to X$ 是连续可微的，根据微分法的链法则，有

$$\psi'(t) = (D\phi)_{x_t}(x'' - x'). \tag{6}$$

利用 (4) 式可得

$$\|\psi'(t)\| \leq \alpha\|x'' - x'\|. \tag{7}$$

注意 $x_t \in B$。当然，这里利用了 B 的凸性，因为

$$\phi(x'') - \phi(x') = \psi(1) - \psi(0) = \int_0^1 \psi'(t)\,\mathrm{d}t. \tag{8}$$

我们可以从 (7) 式得到 ϕ 适合 Lipschitz 条件

$$\|\phi(x'') - \phi(x')\| \leq \alpha\|x'' - x'\| \qquad (x', x'' \in B). \tag{9}$$

然后，由 (3) 式导出

$$\|F(x'') - F(x')\| \geq (1-\alpha)\|x'' - x'\| \qquad (x', x'' \in B). \tag{10}$$

这蕴涵 F 在 B 内是一对一的。还有，如果 $G : F(B) \to B$ 由 $G(F(x)) = x$ 定义，那么，(10) 表明 G 是连续的。

我们的下一个目标是求证 $F(B) \supset (1-\alpha)B$。

选定 $y \in (1-\alpha)B$，记 $x_0 = 0$，$x_1 = y$。假定 $n \geq 1$ 时存在这样的 $x_0, x_1, \ldots, x_n$，能有

$$x_i = y + \phi(x_{i-1}) \qquad (1 \leq i \leq n), \tag{11}$$

以及

$$\|x_i - x_{i-1}\| \leq \alpha^{i-1}\|y\| \qquad (1 \leq i \leq n). \tag{12}$$

（这些条件当 $n = 1$ 时是成立的。）根据 (12) 式，可得

$$\|x_n\| \leq \sum_{i=1}^{n} \|x_i - x_{i-1}\| \leq \sum_{i=1}^{n} \alpha^{i-1}\|y\| < (1-\alpha)^{-1}\|y\|. \tag{13}$$

这表明 $x_n \in B$，$\phi(x_n)$ 存在，因此能够定义

$$x_{n+1} = y + \phi(x_n). \tag{14}$$

将 (14)、(11) 和 (9) 结合起来，就有

$$\|x_{n+1} - x_n\| = \|\phi(x_n) - \phi(x_{n-1})\| \leq \alpha\|x_n - x_{n-1}\|. \tag{15}$$

(14) 和 (15) 表明：归纳假设当 n 被 $n+1$ 替换时仍然成立，并且这个过程能够继续进行，从而产生一个序列 $\{x_n\}$，对于所有的 n，(11) 和 (12) 都成立。由于 $\alpha < 1$，根据 (12) 可知 $\{x_n\}$ 是一个 Cauchy 序列，而 (13) 式将保证该序列能收敛于某个 $x \in B$。最后，(11) 和 (3) 蕴涵 $F(x) = y$。

取 $V = (1-\alpha)B$，$U = G(V) = B \cap F^{-1}(V)$，那么，结论 (a) 和 (b) 均已成立，剩下来的工作是，求证 G 在 V 内连续可微。

设 $y \in V$，$y+h \in V$，$h \neq 0$，$x = G(y)$，$x+k = G(y+h)$，记 $S = (DF)_x$。这时

$$\begin{aligned} G(y+h) - G(y) - S^{-1}h &= k - S^{-1}h \\ &= S^{-1}(Sk - h) \\ &= -S^{-1}[F(x+k) - F(x) - Sk]. \end{aligned}$$

根据 (10)，有 $(1-\alpha)\|k\| \leq \|h\|$，因而

$$\frac{\|G(y+h) - G(y) - S^{-1}h\|}{\|h\|} \leq \|S^{-1}\| \frac{\|F(x+k) - F(x) - Sk\|}{(1-\alpha)\|k\|}.$$

并且，当 $h \to 0$ 时由 (10) 知 $k \to 0$；既然 $S = (DF)_x$，那么，上述不等式表明 $S^{-1} = (DG)_y$。换句话说，即

$$(DG)_y = [(DF)_{G(y)}]^{-1} \qquad (y \in V). \tag{16}$$

由于 G 将 V 连续地映入 X 内，又因为逆映射在 $\mathcal{B}(X)$ 的可逆元集内是连续的（定理 1.4.2），所以 (16) 表明 $y \mapsto (DG)_y$ 是 V 到 $\mathcal{B}(X)$ 内的一个连续映射。 □

原书第 47 页

1.6.7 定理 如果 A 是交换 Banach 代数，开集 $\Omega \subset \mathbb{C}$，$x \in A_\Omega$，还有某个 $f \in H(\Omega)$ 的导数 f' 在 $\sigma(x)$ 上没有零点，那么，x 将有一个邻域 $U \subset A_\Omega$ 使得 $\widetilde{f}$ 在 U 上的限制是一个微分同胚，其值域是 A 的一个开子集。

证 根据定理 1.5.4 的 (e)，$\widetilde{f'}(x)$ 在 A 内可逆。再利用定理 1.6.3 即可得知 $(D\widetilde{f})_x$ 在 $\mathcal{B}(A)$ 内可逆。由于 $y \mapsto (D\widetilde{f})_y$ 连续地将 A_Ω 映入 $\mathcal{B}(A)$，又因为 $\mathcal{B}(A)$ 的可逆元构成一个开集，所以有一个邻域，$(D\widetilde{f})$ 在这个邻域内可逆。然后，应用定理 1.6.6 就可证得本定理。 □

也许有的读者曾经期望过这样的结果，只要 $f \in H(\Omega)$ 在 Ω 内的任一分支内都不是常数值，$\widetilde{f}$ 就是 A_Ω 到 A 内的一个开映射。那么，必须指出，这个命题不能成立，本章习题 17 将给出一个实例。

定理 1.6.7 仅仅证明了：$\widetilde{f}$ 在 $(D\widetilde{f})_x$ 为可逆元的 x 点附近才是开映射。

f' 在 $\sigma(x)$ 上没有零点这一假设，意味着在某个包含 $\sigma(x)$ 的开集上 f 是局部一对一的。后面的定理 1.6.9 将要指出，如果不曾假定 A 是交换代数，那么，这种局部条件将不蕴涵 $\widetilde{f}$ 在 x 为开映射。然而，一个类似的整体定理（定理 1.6.8）却被弄清楚是真实的。

原书第 48 页

1.6.8 定理 如果 A 是 Banach 代数，开集 $\Omega \subset \mathbb{C}$，$f \in H(\Omega)$，并且 f 在 Ω 内是一对一的，那么，$\widetilde{f}$ 是 A_Ω 到 $A_{f(\Omega)}$ 上的一个微分同胚。

证 设 $g : f(\Omega) \to \Omega$ 是 f 的反函数。由于 $g \circ f$ 与 $f \circ g$ 分别是在 Ω 内和在 $f(\Omega)$ 内的恒等映射，从定理 1.5.7 可知 $\widetilde{g} \circ \widetilde{f}$ 是 A_Ω 内的恒等映射，而 $\widetilde{f} \circ \widetilde{g}$ 是 $A_{f(\Omega)}$ 内的恒等映射，所以 $A_{f(\Omega)}$ 是 $\widetilde{f}$ 的值域。既然 $\widetilde{f}$ 及其反函数 $\widetilde{g}$ 都是连续可微的（定理 1.6.5），那么，定理已经得证。 □

1.6.9 定理 如果 $A=\mathcal{B}(X)$，其中的 X 是 $\dim X>1$ 的复 Banach 空间，开集 $\Omega\subset\mathbb{C}$，$f\in H(\Omega)$，又设 f 在 Ω 内并非一对一的，那么，某个 $T_0\in A_\Omega$ 将有一个这样的邻域 U，$\widetilde{f}(U)$ 不能包含 $\widetilde{f}(T_0)$ 的邻域。

因而，$\widetilde{f}$ 在 T_0 不是开映射。

证 按照题设，Ω 内至少有两个点 $\alpha\neq\beta$ 的对应值 $f(\alpha)$ 与 $f(\beta)$ 相等，即 $f(\alpha)=f(\beta)=c$。设 Y 是 X 的一个闭子空间，余维数为 1，选取 $x_1,x_2\in X$，$x_i\neq 0$ $(i=1,2)$，且使 x_2 在 Y 内而 x_1 不在 Y 内。然后定义 $T_0\in A$ 如下：

$$T_0x_1=\alpha x_1,\qquad T_0y=\beta y\quad(y\in Y). \tag{1}$$

如果 $\lambda\neq\alpha$ 且 $\lambda\neq\beta$，可以用 $(\lambda-\alpha)^{-1}$ 乘 x_1 和 $(\lambda-\beta)^{-1}$ 乘 y 来定义 $(\lambda I-T)^{-1}$，这时 $\sigma(T_0)=\{\alpha,\beta\}$，且 $T_0\in A_\Omega$。由定理 1.5.11 的 (a) 得到

$$\widetilde{f}(T_0)=cI. \tag{2}$$

置 $x_3=x_1+x_2$，设 M 是由 x_3 所生成的 X 的一维子空间，再设 δ 是从 T_0x_3 到 M 的距离。我们可以肯定 $\delta>0$，这是因为 $T_0x_3=\alpha x_1+\beta x_2$，又 $\alpha\neq\beta$。

设 Ω_0 为 Ω 的含有 α 的和含有 β 的分支的并集（这样的分支有一个或两个）。然后作 T_0 的一个邻域 U，它所包含的 $T\in A$ 均满足条件

$$\|T-T_0\|<\frac{\delta}{\|x_3\|},\qquad \sigma(T)\subset\Omega_0. \tag{3}$$

我们将要证 $\widetilde{f}(U)$ 不包含 $\widetilde{f}(T_0)+\eta S$，其中 $\eta\neq 0$。至于 $S\in A$ 则定义为

$$Sx_1=x_3,\qquad Sy=0\quad(y\in Y). \tag{4}$$

证明的方法是指出内在的矛盾。设 $\sigma(T)\subset\Omega_0$，$\eta\neq 0$，并且

$$\widetilde{f}(T)=\widetilde{f}(T_0)+\eta S=cI+\eta S. \tag{5}$$

这时，将有

$$\widetilde{f}(T)x_3=(c+\eta)x_3,\qquad \widetilde{f}(T)y=cy\quad(y\in Y). \tag{6}$$

因而 $c+\eta$ 是 $\widetilde{f}(T)$ 的一个特征值，相应的特征空间为 M。由于 $f-(c+\eta)$ 在 α 和 β 上均不等于零，它在 Ω_0 的任一分支内也就不会恒等于零，根据定理 1.5.11 的 (c)，这时 T 应当有一个特征值 γ 使 $f(\gamma)=c+\eta$。该定理的 (a) 还告诉我们，相应的特征空间位于 M 之内，既然 $\dim M=1$，那么，这个特征空间将与 M 相等。因此 $Tx_3\in M$。按照当初选取 δ 的方法，应当有

$$\delta\leq\|Tx_3-T_0x_3\|\leq\|T-T_0\|\,\|x_3\|. \tag{7}$$

这将与 (3) 抵触，所以 T 不在 U 内。 □

原书第 49 页

1.6.10 指数函数 早在定义 1.3.1 中，作为向量级数最重要的例子，我们已经定义指数函数

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

它有一些简单的性质，如

$$\exp(0) = e; \tag{1}$$

以及，对于两个可交换元 x, y，即有 $xy = yx$ 时，它遵从下列泛函方程

$$\exp(x + y) = \exp(x) \exp(y). \tag{2}$$

现在，我们将前面所得到的一些结果具体应用到指数函数上，以揭示出它的若干更深刻的性质。

(a) 如果 $\sigma(x)$ 不包含两个点之间的差是 $2\pi i$ 的整数倍的那些点，那么，$\sigma(x)$ 的紧性表明在某个开集 $\Omega \supset \sigma(x)$ 内 exp 是一对一的。因此根据定理 1.6.8 可知，exp 是从 x 的邻域 A_Ω 到 A 内的一个微分同胚。

(b) 由定义 1.5.3 的 (2) 式，可以直接验证

$$\widetilde{\exp}(x) = \exp(x).$$

然后利用定理 1.6.5 的 (4)，以及 $f(\lambda) = \exp(\lambda)$ 恒有 $f^{(m)} = f$（$m \geq 1$），就能够得到 exp 在点 x 处的 Fréchet 导数是

$$(D \exp)_x = \exp(x)\Phi(C_x),$$

其中的 Φ 是整函数

$$\Phi(\lambda) = \frac{\exp(\lambda) - 1}{\lambda}.$$

Φ 的零点是 $2k\pi i$，$k = \pm 1, \pm 2, \ldots$。如果它们都不曾落在 $\sigma(C_x)$ 内，那么，根据谱映射定理，$\Phi(C_x)$ 是可逆的，于是 $(D \exp)_x$ 也可逆，从而在邻近 x 点处，exp 将是微分同胚。

(c) 下一章我们就要讲到

$$\sigma(C_x) \subset \sigma(x) - \sigma(x)$$

（定理 2.4.3）。这提供了在上述 (a) 与 (b) 之间的一个环节。

(d) 如果 A 是交换代数，那么，对于每个 $x \in A$ 来说，$(D \exp)_x$ 都是可逆的，因为它只是简单地以 $\exp(x)$ 去乘 A 的一个可逆元（定理 1.6.3 的 (2)）。因而 exp 是一个局部同胚，正如读者所熟知的 $A = \mathbb{C}$ 的情况一样。但是，如果像在定理 1.6.9 所说的那样，$A = \mathcal{B}(X)$，那么，exp 将不是 A 到 A 内的一个开映射。

校勘说明（非原书内容）

1. **定理 1.6.3 证明中 Neumann 级数：**原式排版不易辨认，整理为 $(\lambda e-x-h)^{-1}=\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda e-x)^{-n}h^{n-1}$，仅在交换情形成立，符合该定理的假设。

2. **定理 1.6.5 的式 (4)：**原书右端含 $\widetilde{f^{(m)}}(x)C_x^{m-1}$，严格理解为 $\widetilde{f^{(m)}}(x)$ 的*左乘算子*与 C_x^{m-1} 的复合；否则左右两边不是同一类型。原式中的省略约定已由文中式 (10) 说明。

3. **定理 1.6.6：**原书证明末尾出现 “G 将 V 连续地映入 $\mathcal{B}(X)$”，应为 “G 将 V 连续地映入 X”；正文已更正。此外原文“$k\to 0$ 蕴涵 $h\to 0$”应改为“$h\to 0$ 时 $k\to 0$”，正文也已更正。

4. **定理 1.6.9：**原扫描中 x_1,x_2 的下标不甚清晰；根据 T_0 在 $\mathbb{C}x_1\oplus Y$ 上的定义，整理为 $x_1\notin Y$、$x_2\in Y$，并应有 $X=\mathbb{C}x_1\oplus Y$。

5. **定理 1.6.10(b)：**整函数 $\Phi(\lambda)=(e^{\lambda}-1)/\lambda$ 应在 $\lambda=0$ 处定义 $\Phi(0)=1$。原书未在这一段明确写出，整理时保留原式。

6. **章节编号：**原书中 (1)–(10) 等公式编号通常在不同小节重新起计，这里保留它们，允许 LaTeX 产生重复的显示编号。