第二章：半群、生成元与预解算子
第二节（续）：标准例子

b. 标准例子

在本小节中，我们重新考察第一章第 4 节所介绍的强连续半群的例子，并确定与之对应的生成元和预解算子。首先讨论乘法半群，因为其中涉及的所有算子都能显式计算。

2.9 乘法半群（Multiplication Semigroups）

我们在命题 I.4.6（或命题 I.4.12）中已经看到，空间 $\mathrm{C}_0(\Omega)$（或 $L^p(\Omega,\mu)$）上的强连续乘法半群，都是由某个连续（或可测）函数 $q:\Omega\to\mathbb{C}$ 所给出的乘法算子 e^{tq}（$t\geq 0$）构成的，其中 q 的实部（在本质意义下）有上界。不难预料，这个函数同时也给出了该半群的生成元。

引理. 设 $(T(t))_{t\geq 0}$ 是 $X:=\mathrm{C}_0(\Omega)$ 或 $X:=L^p(\Omega,\mu)$ 上的强连续乘法半群，定义为

$$T_q(t)f:=\mathrm{e}^{tq}\cdot f,\qquad f\in X,\quad t\geq 0.$$

则其生成元 $(A,\mathrm{D}(A))$ 为乘法算子

$$Af=M_qf:=q\cdot f,$$

其定义域为

$$\mathrm{D}(A)=\mathrm{D}(M_q):=\{f\in X:qf\in X\}.$$

证明. 令 $X:=\mathrm{C}_0(\Omega)$，取 $f\in\mathrm{D}(A)$。那么对每一个 $s\in\Omega$，都有

$$\lim_{t\downarrow 0}\frac{\mathrm{e}^{tq}f-f}{t}(s)=\lim_{t\downarrow 0}\frac{\mathrm{e}^{tq(s)}f(s)-f(s)}{t}=q(s)f(s).$$

由于该极限存在，且 $Af\in\mathrm{C}_0(\Omega)$，可得 $\mathrm{D}(A)\subseteq\mathrm{D}(M_q)$，并且 $Af=M_qf$。另一方面，分别由定理 1.10(ii) 和命题 I.4.2(iv) 可知，当 λ 充分大时，$A-\lambda$ 与 $M_q-\lambda$ 都可逆。因此 $A=M_q$（参见习题 IV.1.21(5)）。对于 $X:=L^p(\Omega,\mu)$ 的证明留作习题 2.14(2)。 □

此引理结合命题 I.4.5 和 I.4.6（或命题 I.4.11 和 I.4.12），就完整刻画了强连续乘法半群的生成元。下面将 q 的值域的闭包（或本质值域）与 M_q 的谱联系起来，重新表述这一结论；参见命题 I.4.2(iv)（或命题 I.4.10(iv)）。

命题. *设 $(A, \mathrm{D}(A))$ 是 Banach 空间 $\mathrm{C}_0(\Omega)$ 或 $L^p(\Omega, \mu)$ $(1 \le p < \infty)$ 上的算子，则以下断言等价：*

(a) $(A, \mathrm{D}(A))$ 是一个强连续乘法半群的生成元；

(b) $(A, \mathrm{D}(A))$ 是乘法算子，且存在 $w \in \mathbb{R}$ 使得

$$\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda > w\} \subseteq \rho(A).$$

这个命题值得注意的地方在于：条件 (b) 对应于定理 1.10 中的谱条件 (ii)，而它本身就已经保证了相应半群的存在。这与一般半群的情形形成鲜明对比（参见下文的生成定理 3.5 和 3.8）。

2.10 平移半群（Translation Semigroups）

如第一章第 4 节 c 小节及例 I.5.4 所述，左平移算子

$$T_l(t)f(s) := f(s+t), \qquad s, t \in \mathbb{R},$$

在空间 $\mathrm{C}_{\mathrm{ub}}(\mathbb{R})$ 和 $L^p(\mathbb{R})$ $(1 \le p < \infty)$ 上定义了强连续（半）群。在每种情况下，生成元 $(A, \mathrm{D}(A))$ 都是微分算子，但其定义域必须根据所考虑的空间进行调整。

命题 1. *左平移半群 $(T_l(t))_{t\ge 0}$ 在空间 X 上的生成元为*

$$Af := f',$$

其定义域分别如下：

(i) 若 $X := \mathrm{C}_{\mathrm{ub}}(\mathbb{R})$，则

$$\mathrm{D}(A) = \{f \in \mathrm{C}_{\mathrm{ub}}(\mathbb{R}) : f \text{ 可微且} f' \in \mathrm{C}_{\mathrm{ub}}(\mathbb{R})\};$$

(ii) 若 $X := L^p(\mathbb{R})$，$1 \le p < \infty$，则

$$\mathrm{D}(A) = \{f \in L^p(\mathbb{R}) : f \text{ 绝对连续且} f' \in L^p(\mathbb{R})\}.$$

证明. 只需证明 $(T_l(t))_{t\ge 0}$ 的生成元 $(B, \mathrm{D}(B))$ 是上述算子 $(A, \mathrm{D}(A))$ 的限制。事实上，$(T_l(t))_{t\ge 0}$ 是 X 上的压缩半群，故由定理 1.10(ii) 可知 $1 \in \rho(B)$。另一方面，由下面的命题 2 可知 $1 \in \rho(A)$。因此，包含关系 $B \subseteq A$ 将推出 $A = B$（由习题 IV.1.21(5)）。

(i) 固定 $f \in \mathrm{D}(B)$。由于 δ_0 是 $\mathrm{C_{ub}}(\mathbb{R})$ 上的连续线性泛函，故函数

$$\mathbb{R}_+ \ni t \longmapsto \delta_0(T_l(t)f) = f(t)$$

由引理 1.1 和定义 1.2 可知是可微的，而且

$$Bf = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}T_l(t)f\right]_{t=0} = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t+\cdot)\right]_{t=0} = f'.$$

这就证明了 $\mathrm{D}(B) \subseteq \mathrm{D}(A)$，且 $A|_{\mathrm{D}(B)} = B$。因而如上所述，$A = B$。

(ii) 取 $f \in \mathrm{D}(B)$，令 $g := Bf \in L^p(\mathbb{R})$。由于在紧区间上积分是 $L^p(\mathbb{R})$ 上的连续运算，对任意 $a, b \in \mathbb{R}$，有

$$\frac{1}{h}\int_b^{b+h} f(s)\,\mathrm{d}s - \frac{1}{h}\int_a^{a+h} f(s)\,\mathrm{d}s = \int_a^b \frac{f(s+h)-f(s)}{h}\,\mathrm{d}s$$

当 $h \downarrow 0$ 时收敛到 $\int_a^b g(s)\,\mathrm{d}s$。然而，根据文献 [Tay85, Thm. 9-8 VI]，左端对几乎所有 a, b 收敛到 $f(b) - f(a)$。在一个零测集上重新定义 f 后，我们得到

$$f(b) = \int_a^b g(s)\,\mathrm{d}s + f(a), \qquad b \in \mathbb{R}.$$

因此 f 绝对连续，且其导数几乎处处等于 g。这同样证明了 $\mathrm{D}(B) \subseteq \mathrm{D}(A)$，且 $A|_{\mathrm{D}(B)} = B$，于是如前所述 $A = B$。 □

为了完成上述证明，下面给出微分算子 A 在前一命题中指定的“最大”定义域 $\mathrm{D}(A)$ 上的预解算子的显式公式。简单的证明留作习题 2.14(1)。

命题 2. *对上述任一空间 X，具有最大定义域 $\mathrm{D}(A)$ 的微分算子 A（即左平移半群的生成元），当 $\mathrm{Re}\,\lambda > 0$ 时，其预解算子 $R(\lambda, A)$ 为*

$$(R(\lambda, A)f)(s) = \int_s^\infty \mathrm{e}^{-\lambda(\tau - s)} f(\tau)\,\mathrm{d}\tau, \qquad f \in X, \quad s \in \mathbb{R}. \tag{2.3}$$

显然，还有许多其他函数空间上的平移算子可以定义强连续半群。只要这些空间包含于 $L^p(\mathbb{R})$ 或 $\mathrm{C_{ub}}(\mathbb{R})$ 中，例如，命题 2.3 就允许我们将其生成元识别为微分算子在相应空间上的部分算子。将这一结论与第 2.4 段中的商空间构造相结合，便可得到 $\mathbb{R}_+$ 和有限区间上的平移半群的生成元（参见第一章第 4 节第 16 段和第 17 段）。

下面给出这一方法的一个例子。

2.11 平移半群（续）

考虑第 2.10 段中空间 $X := L^1(\mathbb{R})$ 上的左平移（半）群。此时，闭子空间

$$Y := \{f \in L^1(\mathbb{R}) : f(s) = 0, \text{ 当} s \geq 1\},$$

与 $L^1(-\infty,1)$ 同构，并且在 $(T(t))_{t\geq 0}$ 下不变。子空间半群 $(T(t)|_Y)_{t\geq 0}$ 的生成元为

$$A_| f = f',$$

其定义域为

$$\mathrm{D}(A_|) = \left\{ f \in L^1(\mathbb{R}) : \begin{array}{l} f \text{ 绝对连续}, \\ f' \in L^1(\mathbb{R}) \text{ 且} f(s) = 0, \text{ 当} s \geq 1 \end{array} \right\}.$$

在 Y 中，对于子空间半群 $(T(t)|_Y)_{t\geq 0}$，空间

$$Z := \{ f \in Y : f(s) = 0, \text{ 当} 0 \leq s \leq 1 \}$$

也是闭的且不变的。商空间 Y/Z 与 $L^1[0,1]$ 同构，而商半群与第一章第 4 节第 17 段中的幂零左平移半群同构。由第 2.4 段可知，其生成元 $A_{|/}$ 满足

$$A_{|/} f = f',$$

定义域为

$$\mathrm{D}(A_{|/}) = \{ f \in L^1[0,1] : f \text{ 绝对连续}, \ f' \in L^1[0,1] \text{ 且} f(1) = 0 \}.$$

与前面一样，可以利用公式 (1.13) 显式确定其预解算子。于是对任意 $\lambda \in \mathbb{C}$，有

$$(R(\lambda, A_{|/}) f)(s) = \int_s^1 \mathrm{e}^{-\lambda(\tau - s)} f(\tau)\, \mathrm{d}\tau, \qquad f \in L^1[0,1], \quad s \in [0,1]. \tag{2.4}$$

在前面的例子中，我们总是从显式给出的半群出发，再确定其生成元。最后两个例子则从（二阶）微分算子出发，通过直接计算证明它们生成强连续半群。

2.12 扩散半群（一维）(Diffusion Semigroups)

考虑 Banach 空间 $X := C[0,1]$ 和微分算子

$$Af := f'',$$

其定义域为

$$\mathrm{D}(A) := \{ f \in C^2[0,1] : f'(0) = f'(1) = 0 \}.$$

这个定义域是 X 的稠密子空间，并且在图范数下完备；因此 $(A, \mathrm{D}(A))$ 是一个闭的稠密定义算子。对每个 $n \geq 0$，定义函数

$$e_n(s) := \begin{cases} 1, & n = 0, \\ \sqrt{2}\cos(\pi n s), & n \geq 1. \end{cases}$$

它们均属于 $\mathrm{D}(A)$，并满足

$$Ae_n = -\pi^2 n^2 e_n. \tag{2.5}$$

由 Stone–Weierstrass 定理和初等三角恒等式可知，

$$Y := \lin\{e_n : n \geq 0\} \tag{2.6}$$

是 X 的一个稠密子代数。考虑秩一算子

$$e_n \otimes e_n : f \longmapsto \langle f, e_n\rangle e_n := \left(\int_0^1 f(s)e_n(s)\,\mathrm{d}s\right) e_n,$$

它们满足

$$\|e_n \otimes e_n\| \leq 2,$$

且对于所有 $n, m \geq 0$，有

$$(e_n \otimes e_n)e_m = \delta_{nm} e_m. \tag{2.7}$$

利用这些算子，可对 $t > 0$ 定义

$$T(t) := \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\pi^2 n^2 t}\, e_n \otimes e_n. \tag{2.8}$$

对 $f \in C[0,1]$ 以及 $s \in [0,1]$，这意味着

$$(T(t)f)(s) = \int_0^1 k_t(s,r) f(r)\,\mathrm{d}r, \tag{2.9}$$

其中

$$k_t(s,r) := 1 + 2\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{e}^{-\pi^2 n^2 t} \cos(\pi n s)\cos(\pi n r).$$

Jacobi 恒等式

$$w_t(s) := \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{-\frac{(s+2n)^2}{4t}} = \frac{1}{2} + \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{e}^{-\pi^2 n^2 t}\cos(\pi n s)$$

（参见 [SD80, Kap. I, Satz 10.4]）以及若干三角恒等式表明，对每个 $t > 0$，核 $k_t(\cdot,\cdot)$ 满足

$$k_t(s,r) = w_t(s+r) + w_t(s-r).$$

因此，$k_t(\cdot,\cdot)$ 是 $[0,1]^2$ 上的正的连续函数，且

$$\|T(t)\| = \|T(t)\mathbf{1}\| = \sup_{s\in[0,1]} \int_0^1 k_t(s,r)\,\mathrm{d}r = 1.$$

利用恒等式 (2.7)，很容易验证：在由 e_n（$n \geq 0$）生成的一维子空间上，算子 $T(t)$ 满足半群律（FE）；由连续性，该性质遂在整个 X 上成立。同样，强连续性在 Y 上成立，因而由命题 I.5.3 可推广到 X。

上述讨论已经证明了以下结果的大部分内容。

命题. 上述算子 $T(t)$（$t \geq 0$，其中 $T(0) = I$）在 $X := C[0,1]$ 上构成强连续半群，其生成元为

$$Af = f'',$$

定义域为

$$\mathrm{D}(A) = \{f \in C^2[0,1] : f'(0) = f'(1) = 0\}.$$

证明. 只剩下证明 $(T(t))_{t\geq 0}$ 的生成元 B 与 A 相同。为此，首先注意到 (2.6) 中定义的子空间 Y 在 X 中稠密，包含于 $\mathrm{D}(B)$ 中，并且在 $(T(t))_{t\geq 0}$ 下不变。因此，由命题 1.7 可知，Y 是 B 的一个核（core）。其次，由 $T(t)$ 的定义和公式 (2.7) 可得，A 和 B 在 Y 上一致。所以

$$B = \overline{A|_Y},$$

特别地，B 是 A 的一个限制。由线性常微分方程理论可知 $1 \in \rho(A)$。另一方面，由定理 1.10(ii) 可知 $1 \in \rho(B)$，因此 $A = B$。 □

2.13 扩散半群（n 维）

下面这个经典例子是半群理论发展的主要源头之一。它描述了热流、扩散过程或 Brown 运动，因而有热半群、高斯半群或扩散半群等名称。我们在 $X := L^p(\mathbb{R}^n)$（$1 \leq p < \infty$）上考虑它。对 $t > 0$、$s \in \mathbb{R}^n$、$f \in X$，显式定义

$$T(t)f(s) := (4\pi t)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-\frac{|s-r|^2}{4t}} f(r)\,\mathrm{d}r. \tag{2.10}$$

令

$$\mu_t(s) := (4\pi t)^{-n/2}\mathrm{e}^{-\frac{|s|^2}{4t}},$$

便可写成

$$T(t)f(s) = \mu_t * f(s).$$

命题. 上述算子 $T(t)$（$t > 0$，且 $T(0) = I$）在 $L^p(\mathbb{R}^n)$（$1 \leq p < \infty$）上构成强连续半群，其生成元 A 等于 *Laplace* 算子

$$\Delta f(s) := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial s_i^2} f(s_1, \ldots, s_n)$$

在 *Schwartz* 空间 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$（参见定义 *VI.5.1*）上定义的算子的闭包。

证明. 由于 $\mu_t \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$，对每个 $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$，定义 $T(t)f(s)$ 的积分都存在。此外，由 Young 不等式（参见 [RS75, p. 28]）可得

$$\|T(t)f\|_p \leq \|\mu_t\|_1 \cdot \|f\|_p \leq \|f\|_p.$$

因此，每个 $T(t)$ 都是 L^p 上的压缩算子。由于 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 在 L^p 中稠密，且在 $T(t)$ 下不变，只需研究 $T(t)|_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)}$。我们借助 Fourier 变换 $\mathcal{F}$ 来实现这一点，$\mathcal{F}$ 保持 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 不变。由 $\mathcal{F}$ 的通常性质（参见引理 C.12 或 [Rud73, Thm. 7.2]），对每个 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$，有

$$\mathcal{F}(\mu_t * f) = \mathcal{F}(\mu_t) \cdot \mathcal{F}(f).$$

由于对 $\xi \in \mathbb{R}^n$，

$$\mathcal{F}(\mu_t)(\xi) = \mathrm{e}^{-|\xi|^2 t},$$

其中 $|\xi| := \left(\sum_{i=1}^n \xi_i^2\right)^{1/2}$（参见例 VI.5.3），故 $\mathcal{F}$ 将 $\left(T(t)|_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)}\right)_{t\geq 0}$ 变换为 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 上的乘法半群；对于 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 的通常拓扑，它逐点连续。再像引理 2.9 那样直接计算，可知其在 $t = 0$ 处的右导数是乘法算子

$$Bg(\xi) := -|\xi|^2 g(\xi), \qquad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

通过 Fourier 逆变换将这些信息传回，便证明 $(T(t))_{t\geq 0}$ 满足半群律。由于 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 的拓扑比 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 所诱导的拓扑更强，我们也得到在 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 上的强连续性，从而得到在 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 上的强连续性。最后，乘法算子 B 在 Fourier 逆变换下对应的正是 Laplace 算子。因为 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 稠密且在 $(T(t))_{t\geq 0}$ 下不变，所以由命题 1.7 可知，我们已经在生成元 A 的一个核（core）上确定了它。 □

关于这个例子的推广，参见第 VI.5 节。

2.14 习题

(1) 计算 $\mathbb{R}$、$\mathbb{R}_+$ 或有限区间上各种平移半群的生成元的预解算子。特别地，推导预解算子的表示式 (2.3)。（提示：使用积分表示式 (1.14)。）由此确定它们的生成元及定义域，与第 2.10 段和第 2.11 段中的结论相同。

(2) 对 $X := L^p(\Omega, \mu)$ 证明第 2.9 段中的引理。

(3) 令 $X := L^\infty(\mathbb{R})$，证明：

(i) X 上的乘法半群强连续，当且仅当它一致连续；

(ii) 平移（半）群不是强连续的。

注意：Lotz 在 [Lot85] 中证明，对于某一类包含所有 L^∞ 空间的 Banach 空间，其上的强连续半群必然一致连续。另见 [Nag86, A-II.3]。

(4*) 考虑 $X := L^\infty(\mathbb{R})$ 上的平移（半）群 $(T(t))_{t\in\mathbb{R}}$，以及闭的、在 $(T(t))_{t\in\mathbb{R}}$ 下不变的子空间 $Y := \mathrm{C_{ub}}(\mathbb{R})$。商算子 $T(t)_/$ 在 X/Y 上定义了一个压缩（半）群，其轨道 $t \mapsto T(t)_/\widehat{f}$ 连续（可微），当且仅当 $\widehat{f} = 0$。注意，这样我们就得到了问题 I.3.1 的一个不连续但并非病态的解。（提示：参见 [NP94]。）